-SUP- en poche

MATHS

L1 / L2

2e édition

Toutes les maths pour bien commencer sa licence en 36 fiches

François Cottet-Emard

- Résumés de cours
- + de 200 exercices corrigés
- Méthodologie et conseils

+ EN LIGNE

OFFERT

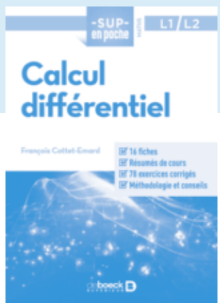
- 11 fiches en ligne
- + de 180 QCM interactifs

deboeck SUPÉRIEUR

Toutes les maths pour bien commencer sa licence en 36 fiches

DANS LA MÊME COLLECTION

Sup en poche est une collection destinée aux étudiants du 1er cycle, essentiellement en Licence 1 et 2. Son objectif est de permettre à l'étudiant de réviser et s'entraîner en vue de réussir ses examens. Chaque ouvrage est composé de fiches proposant des cours résumés suivis d'exercices corrigés pas à pas.



-SUP- en poche

MATHS

L1 / L2

Toutes les maths

pour bien commencer sa licence en 36 fiches

François Cottet-Emard

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web : www.deboecksuperieur.com

Rue du Bosquet, 7 - B-1348 Louvain-la-Neuve

Dépôt légal :
Bibliothèque Nationale, Paris : août 2022
Bibliothèque royale de Belgique, Bruxelles : 2022/13647/072

ISSN : 2566-2724
ISBN : 978-2-8073-4079-4

Sommaire

Présentation

Cet ouvrage expose tout ce qu'il faut savoir en mathématiques, en sortant du Lycée, pour bien aborder des études supérieures, que ce soit en mathématiques, en physique, en chimie, en biologie, en sciences économiques. Il s'articule autour d'un volume papier, celui que vous avez en main en ce moment, et de compléments en ligne facilement accessibles.

L'articulation entre le livre papier et les ressources en ligne est décrite dans la fiche 0 du présent ouvrage papier. Cette fiche 0 du livre papier est donc vitale pour accéder aux ressources en ligne.

Le volume papier

Le volume papier est composé de 25 fiches, ce que l'on appelait autrefois chapitres, et il contient tout ce qui est absolument fondamental, les mathématiques issues du secondaire quand on a suivi une option mathématique en classe de première et une en terminale. Chacune de ces fiches contient les rappels de cours et des exercices corrigés. Chacune possède des compléments en ligne : soit des compléments de cours, soit des exercices supplémentaires corrigés, et un QCM interactif. Les liens pour accéder à ces compléments sont indiqués en tête de chaque fiche papier, et détaillés dans la fiche 0. Chaque endroit d'une fiche faisant référence à un complément en ligne est clairement indiqué dans le texte papier avec le symbole .

Les ressources en ligne

L'ensemble des compléments en ligne est formé de quatre composantes :

- Les compléments PDF de chaque fiche du volume papier (fiches de 1 à 25).
- Dix nouvelles fiches (numérotées de 26 à 35), issues des options mathématiques complémentaires ou expertes du Lycée. Ce sont des approfondissements, qui ne seront pas nécessairement utiles à tous, cela dépendra de la poursuite d'études choisie dans le Supérieur. Mais, dans tous les cas, ces fiches présentent de façon claire et concrète des notions dont il faut savoir qu'elles existent. Ces fiches sont en format PDF, accessibles par des liens qui sont indiqués en fiche 0 et nulle part ailleurs, attention.

- Des problèmes récapitulatifs (fiche 36), axés sur le contenu du volume papier, et pouvant donc être traités par tout lecteur. Ils sont regroupés dans un unique fichier PDF accessible par un lien indiqué en fiche 0.
- Des QCM interactifs, dont l'accès est expliqué aussi en fiche 0.

Accès aux ressources en ligne

Les accès aux ressources en ligne sont détaillés dans la fiche 0 de l'ouvrage papier, la première fiche du livre.

Contenu mathématique

Cet ouvrage fait le pont entre la fin de l'enseignement secondaire et le début de l'enseignement supérieur, Universités et Classes Préparatoires. Il reprend toutes les notions fondamentales exposées au lycée, et même au collège, et qui doivent être parfaitement maîtrisées pour continuer après le bac.

Tous les domaines sont revus, que ce soit les manipulations algébriques, les identités remarquables, les manipulations des inégalités, l'analyse avec les nombres réels, les études de fonction, la continuité, la dérivation, les limites, les primitives, la trigonométrie, l'exponentielle et le logarithme, les suites. Il contient aussi tout ce qui doit être maîtrisé en géométrie, depuis les théorèmes de Thalès et de Pythagore jusqu'aux équations de droites et plans, les vecteurs, le produit scalaire, les transformations importantes comme la translation, la symétrie, la rotation, et aussi les solides et volumes fondamentaux. Il se poursuit par les probabilités, des débuts jusqu'aux intervalles de fluctuation et de confiance, notions délicates. Une fiche en ligne introduit quelques compléments utiles pour la physique, non étudiés au lycée, mais simples et très vite utilisés en licence. Une fiche d'algorithmique rappelle les boucles fondamentales de répétition. Des fiches spécifiques sur les matrices, les chaînes de Markov, la théorie des graphes, les statistiques, sont à la fois de la culture générale pour tous et utiles pour les étudiants concernés. Finalement, des problèmes récapitulatifs de niveau bac, en ligne, terminent l'ouvrage.

C'est un condensé en 250 pages papier et autant en ligne de toutes les mathématiques de l'Enseignement Secondaire. C'est un ouvrage de référence à conserver tout au long de ses études, et qui permet de retrouver tout ce que l'on aurait oublié, et de vérifier ses connaissances en cas de doute. Cet ouvrage n'est pas a priori destiné à la préparation du baccalauréat, mais il saura être une référence utile et pratique à posséder dès le début de la terminale.

Chaque fiche contient une partie de cours, avec les rappels et les résultats fondamentaux, bien sûr sans démonstration. Les techniques importantes sont mises en exergue dans des encadrés « Méthodologie ». Les choses vitales à connaître sont rappelées dans des encadrés « Point vital à maîtriser ». Quelques formules dépassant légèrement le cadre du Lycée sont parfois ajoutées, pour faciliter le démarrage en L1/CPGE, résultats utiles dès le début de l'année, mais exposés un peu plus tard en pratique. De très nombreux exemples illustrent le cours. Chaque fiche contient ensuite des exercices corrigés, que ce corrigé soit sur papier ou en ligne, et (en ligne) un QCM interactif.

Les fiches de probabilités sont très développées, conformes aux programmes du Lycée, et elles développent bien les notions délicates, comme la loi des grands nombres, les intervalles de fluctuation et de confiance, et qui doivent être vues et revues avant d'être bien maîtrisées. Compte-tenu du format réduit de l'ouvrage, le nombre de figures du volume papier a été limité, particulièrement en géométrie. Parmi les fiches importantes, celle de géométrie rappelle les calculs de volume, trop vite oubliés, mais qui doivent être connus.

Pour Alice, Audrey et Émilie qui sauront se reconnaître.

COURS

0 Accès aux ressources en ligne

Cette fiche, non mathématique, explique comment accéder aux ressources en ligne de l'ouvrage, à savoir :

1. Accéder aux compléments en ligne des fiches 1 à 25 du volume papier.
2. Accéder aux fiches 26 à 35 entièrement en ligne.
3. Accéder aux problèmes récapitulatifs en ligne, la fiche 36.
4. Accéder aux QCM interactifs.

1 Accès aux compléments en ligne d'une fiche papier

Les 25 fiches du volume papier, à l'exception de la fiche 5, ont un complément en ligne qui est un fichier PDF. Pour accéder (par exemple) aux compléments en ligne de la fiche 14, on se connecte via le lien (rappelé aussi en tête de la fiche papier)

www.lienmini.fr/40794-14

ou bien on scanne le QR Code se trouvant en tête de la fiche, en haut de la première ou éventuellement de la deuxième page de la fiche papier. Le lien précédent est évidemment aussi rappelé à côté du QR Code.

2 Accès aux fiches en ligne 26 à 35

- L'ouvrage contient 10 fiches entièrement en ligne, numérotées de 26 à 35 et dont les titres se trouvent dans le sommaire. L'accès est exactement le même que pour les compléments d'une fiche papier, un lien et un QR Code.
- Pour accéder (par exemple) à la fiche en ligne 30, on se connecte via le lien

www.lienmini.fr/40794-30

- Voici la liste des QR code donnant accès à ces fiches.

Attention, le présent paragraphe est l'unique endroit où vous trouverez les accès des fiches en ligne 26 à 35.

Fiche 26 :
Équations différentielles
www.lienmini.fr/40794-26

Fiche 27 :
Compléments d'analyse pour la physique
www.lienmini.fr/40794-27

Fiche 28 :
Congruences arithmétiques
www.lienmini.fr/40794-28

Fiche 29 :
Matrices
www.lienmini.fr/40794-29

Fiche 30 :
Graphes non orientés
www.lienmini.fr/40794-30

Fiche 31 :
Parcours eulériens, algorithme de Dijkstra, coloration
www.lienmini.fr/40794-31

Fiche 32 :
Chaînes de Markov à 2 ou 3 états
www.lienmini.fr/40794-32

Fiche 33 :
Statistique à 1 variable
www.lienmini.fr/40794-33

Fiche 34 :
Statistique à 2 variables
www.lienmini.fr/40794-34

Fiche 35 :
Algorithmique élémentaire
www.lienmini.fr/40794-35

3 Problèmes récapitulatifs en ligne et leur accès

L'ouvrage contient 12 problèmes récapitulatifs entièrement en ligne, énoncés et corrigés, regroupés dans un même fichier PDF. Voici la liste des problèmes et la façon d'accéder à ce fichier PDF :

1. Algèbre : divisibilité par 3 et raisonnement par récurrence. Trois exercices indépendants.
2. Analyse : étude de $\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.
3. Géométrie : géométrie de la parabole $y = x^2$, équation du second degré, Pythagore. Trois exercices indépendants.
4. Probabilités : mouvements de population entre deux villes, suite arithmético-géométrique. Nombre d'arrêts d'un ascenseur dans un immeuble de bureaux. Deux exercices indépendants.
5. Probabilités : fleurs malades dans le jardin, probabilités conditionnelles. Roulette simplifiée au casino. Deux exercices indépendants.
6. Analyse : étude de la fonction $f : x \mapsto e^x + e^{-x} - 2x - 2$.
7. Analyse : étude de la suite définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.
8. Géométrie : recherches des droites équidistantes des sommets d'un triangle. Recherche des points vérifiant $MA = 2MB$. Deux exercices indépendants.
9. Analyse et Physique : étude de la balistique d'un boulet de canon, équation du second degré, paraboles, portée.
10. Probabilités : montages en série et en parallèle, variables aléatoires, loi binomiale.
11. Analyse : dérivation, identification, fonctions trigonométriques et exponentielles, systèmes linéaires à deux inconnues, un peu de physique.
12. Géométrie : équations de droites et de plans, droites non parallèles de l'espace, plans parallèles, systèmes d'équations.

Le fichier PDF des problèmes récapitulatifs est accessible via le lien

www.lienmini.fr/40794-36

ou par le QRcode ci-dessous.

4 QCM interactifs

- Chaque fiche du volume papier (à l'exception de la fiche descriptive 5) contient un certain nombre de questions/exercices sous forme de QCM. Certains QCM ont été regroupés avec d'autres :

QCM des fiches 1 et 2	regroupés en fiche 2
QCM des fiches 8 et 9	regroupés en fiche 9
QCM des fiches 11 et 12	regroupés en fiche 12
QCM des fiches 14 et 15	regroupés en fiche 15
QCM des fiches 20 et 21	regroupés en fiche 21
QCM des fiches 24 et 25	regroupés en fiche 25

- L'accès aux QCM se fait par une URL ou un QR code indiqués à la fin des énoncés des exercices de la fiche. Pour les regroupements indiqués ci-dessus, ces indications sont données comme l'indique le tableau. Par exemple, les accès aux QCM des fiches 1 et 2 sont indiqués sur la page des énoncés des exercices de la fiche 2.
- Quand l'ensemble des QCM est assez court, l'accès se fait par une seule adresse. Par exemple, l'accès aux QCM de la fiche 4 se fait par :

  lienmini.fr/40794-QCM4 ou par un QRcode donné en fiche 4.

- Si l'ensemble des QCM d'une fiche est long, il est découpé en plusieurs blocs, et il y a plusieurs URL et QR codes. Par exemple, pour l'ensemble des fiches 1 et 2, il y a 3 groupes de QCM dont les liens sont :

  lienmini.fr/40794-QCM1-1-10 (questions de 1 à 10)
  lienmini.fr/40794-QCM1-11 (questions 11)
  lienmini.fr/40794-QCM1-12 (questions 12)

  ou par trois QR Code donnés à la fin des exercices de la fiche 2.

COURS

1 Le raisonnement

[MOTS-CLÉS : implication, équivalence, suffisant, nécessaire, réciproque, absurde, contre-exemple, quel que soit, il existe, récurrence, disjonction]

Les lettres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ désignent deux propriétés quelconques, à savoir deux affirmations qui peuvent être soit vraies soit fausses.

1 L'équivalence $\Longleftrightarrow$ de deux propriétés

Deux propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ équivalentes sont deux affirmations de la même chose, traduites de façons différentes. L'une est vraie si et seulement si l'autre est vraie.

Exemple 1 : « être majeur en France » et « avoir 18 ans » sont deux propriétés équivalentes (en faisant abstraction des mineurs émancipés.)

Exemple 2 : La propriété « l'entier n est pair » est équivalente à la propriété « l'entier $n+1$ est impair ».

Exemple 3 : « $ax^2+bx+c=0$ admet deux racines réelles distinctes » et « le discriminant est strictement positif » sont deux propriétés équivalentes.

Exemple 4 : La propriété « le triangle ABC est rectangle en A » équivaut à la propriété « $BC^2=AB^2+AC^2$ » (Pythagore).

- Raisonner par équivalence pour démontrer un certain résultat $\mathcal{Q}$ en partant d'hypothèses $\mathcal{P}$ consiste à trouver une suite de propriétés équivalentes allant de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{Q}$. C'est très sécurisant, car on peut toujours revenir en arrière quand on avance, chose rendue possible par l'équivalence.
- Par contre, et c'est aussi vrai dans la vie courante, avoir en permanence la possibilité de revenir en arrière ne permet en général pas d'avancer franchement. Si l'on veut avancer franchement, faire des progrès, aller de l'avant, il faut couper les ponts vers l'arrière, et cela ne se fait pas en raisonnant par équivalence, mais en raisonnant par implication, objet du paragraphe suivant.

2 L'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$

- Il s'agit du cas de figure suivant :

Si la propriété $\mathcal{P}$ est vraie, alors la propriété $\mathcal{Q}$ est obligatoirement vraie.

- Mais le fait que que $\mathcal{Q}$ soit vraie ne fournit aucune information sur le fait que $\mathcal{P}$ soit vraie ou fausse.

Exemple 5 : « avoir le permis de conduire » implique « avoir au moins 18 ans ». Mais avoir au moins 18 ans n'implique pas qu'on ait le permis.

Exemple 6 : « être milliardaire » implique « être millionnaire ». Mais il y a plein de millionnaires qui ne sont pas milliardaires.

Exemple 7 : La propriété $x = \sqrt{x+2}$ implique la propriété $x^2 = x + 2$, obtenue en élevant au carré. Mais $x^2 = x+2$ n'implique pas obligatoirement que $x = \sqrt{x+2}$, puisque l'on peut aussi avoir $x = -\sqrt{x+2}$.

Méthodologie

Le fait d'avoir démontré l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, ne donne aucune information permettant de dire que $\mathcal{Q}$ implique $\mathcal{P}$: en général, on ne peut pas revenir en arrière dans le raisonnement.

Exemple 8.a : Le trajet entre A et B dure au minimum 50 minutes et au maximum 1h, et j'ai un rendez-vous en B à 11h. La propriété « je pars de A à 9h59 » implique la propriété « je suis à l'heure au rendez-vous ».

Exemple 8.b : Mais le fait d'être à l'heure au rendez-vous n'implique pas que je suis parti à 9h59 : j'aurais très bien pu partir à 9h34 et attendre !

Se convaincre que

L'implication est donc moins sécurisante que l'équivalence, mais c'est la méthode de raisonnement la plus constructive et la plus utilisée, en sciences comme dans la vie courante.

3 Relation entre implication et équivalence

$P \Longleftrightarrow Q$ signifie que l'on a les deux implications $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$.

Exemple 9 : La démonstration du théorème de Pythagore se fait en démontrant de façons distinctes l'implication « rectangle en A implique $BC^2 = AB^2 + AC^2$ » et l'implication *appelée réciproque* « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ implique rectangle en A ». Les démonstrations sont nombreuses, et en général totalement différentes entre la partie directe et la réciproque : il est quasiment impossible, sans le produit scalaire, de procéder directement par une suite d'équivalences.

4 Condition nécessaire et condition suffisante

Exemple 10 : Reprenons l'exemple 8. Les significations courantes des adjectifs « suffisant » et « nécessaire » permettent d'écrire que :
- « partir à 9h58 » est une condition *suffisante* pour arriver à l'heure.
- « partir avant 10h10 » est une condition *nécessaire* pour arriver à l'heure.

◆ Il s'agit d'une autre façon d'exprimer l'implication.

On dit que $\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie quand on a l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

On dit que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire pour que $\mathcal{P}$ soit vraie quand on est dans la situation suivante : si $\mathcal{Q}$ est fausse, alors $\mathcal{P}$ est automatiquement fausse.

Exemple 11 : « être divisible par 4 » est une condition suffisante pour « être pair ».

Exemple 12 : « être divisible par 6 » est une condition nécessaire pour « être divisible par 72 ».

De la mauvaise utilisation des mots

Très souvent dans la vie courante, on utilise « il faut » (ce qui sous-entend que l'on se place dans une condition nécessaire) au lieu de « il suffit ». Dans notre trajet, on a souvent tendance à dire *il faut que je parte à 9h55* alors que l'on devrait dire *il suffit que je parte à 9h55*.

5 Que signifie « étudier la réciproque » ?

◆ **Le cadre :** l'énoncé vient de faire démontrer qu'une certaine propriété $\mathcal{P}$ implique une autre propriété $\mathcal{Q}$.

- **L'objectif :** « Étudier la réciproque » consiste à regarder si la propriété $\mathcal{Q}$ implique la propriété $\mathcal{P}$. Il y a évidemment deux réponses possibles :
- La réponse est oui : les deux propriétés sont équivalentes.
- La réponse est non : on a uniquement $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$.

Méthodologie hasardeuse

Quand l'énoncé demande de démontrer une réciproque, la question est claire et la réponse est oui. Quand il demande d'étudier la réciproque, on est tenté de dire qu'elle n'est pas vraie, mais c'est peut-être un piège !

- Certains théorèmes comme Pythagore et Thalès sont connus pour leurs réciproques qui sont vraies, et qui sont au moins aussi utiles que la partie directe du théorème.

6 Les formulations « Quel que soit » et « Il existe au moins »

- Dans la vie courante comme en mathématiques, on est fréquemment confronté à deux situations dont la formulation commence soit par « Quel que soit… » ou bien par « il existe au moins… » :

Exemple 13 : « Toutes les voitures ont un volant ». Il s'agit d'une proposition qui, actuellement, est vraie. On peut aussi dire, même si c'est moins élégant : « quelle que soit la voiture, la propriété *avoir un volant* est vraie ».

Exemple 14 : La propriété « Tout entier divisible par 10 est divisible par 5 » est vraie. La propriété « Tout entier pair est divisible par 4 » est fausse, il suffit de regarder l'entier 6.

Exemple 15 en ligne : exemple littéraire avec Gustave Flaubert.

Exemple 16 : « Il existe au moins un entier pair non divisible par 6 ». Cette proposition est vraie, il suffit de prendre l'entier 4.

- On est donc très souvent confronté, dans un ensemble E, à l'une ou l'autre des deux formulations suivantes :

– Pour tout élément x de E, alors la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.
– Il existe au moins un élément de E tel que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

- Les expressions « quel que soit » et « il existe au moins » s'appellent quantificateurs.

Point vital à maîtriser

Souvent, on abrège « Il existe au moins » en « Il existe ». Mais c'est toujours avec le sous-entendu « au moins », ce qui signifie qu'il peut y en avoir plusieurs.

7 Raisonner par l'absurde

- C'est une méthode de raisonnement puissante, agréable et sécurisante.
- **Le cadre :** on veut montrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ est vraie.
- **Ce que l'on suppose :** on suppose que $\mathcal{P}$ est fausse. C'est l'hypothèse dite par l'absurde.
- **Ce que l'on fait :** on construit un raisonnement qui conduit à un résultat absurde : soit une impossibilité complète (du style $2 = 3$), soit une contradiction avec l'hypothèse « $\mathcal{P}$ est fausse » que l'on a faite.
- **Conclusion :** puisqu'on est arrivé à une impossibilité, notre hypothèse « $\mathcal{P}$ est fausse » est absurde. Il s'en suit que $\mathcal{P}$ est vraie, et elle est démontrée.

Exemple 17 en ligne : il y a une infinité de nombres premiers[1].

8 La démonstration par contre-exemple

Exemple 18.a : On demande d'étudier la propriété suivante « dans tout triangle, le centre du cercle circonscrit est intérieur au triangle », et on pense que c'est faux.

Exemple 18.b : Pour démontrer que c'est faux, il suffit de construire un triangle qui ne contient pas le centre de son cercle circonscrit. Pour ce faire, on trace un cercle et un diamètre quelconque ; ensuite on prend trois points du cercle situés du même côté de ce diamètre.

Exemple 18.c : Le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle de départ, est extérieur au triangle. On a trouvé un contre-exemple à la propriété énoncée, et donc celle-ci est fausse.

1. Rappelons que tout entier $n \geq 2$ est un nombre premier ou bien est divisible par au moins un nombre premier.

Méthodologie

Pour montrer que le résultat « Pour tout élément de E, alors la propriété $\mathcal{P}$ est vraie » est faux, il suffit d'exhiber un élément de E pour lequel la propriété est fausse. Cet élément s'appelle contre-exemple du résultat.

- La fiche 2 *la négation* fera le lien avec la négation du quantificateur « quel que soit ».

9 Le raisonnement par récurrence

La fiche 3 lui est entièrement consacrée.

10 Le raisonnement par disjonction des cas

On a une liste exhaustive de tous les cas possibles, et on les regarde les uns après les autres. D'une certaine façon, on a la liste des suspects et on les cuisine chacun à son tour. On élimine tous les cas, sauf un : comme disait un célèbre détective britannique, *quand on a éliminé l'impossible, il reste la solution*. Un bel exemple est en ligne.

11 Les quantificateurs en mathématique

Il existe des symboles mathématiques « $\forall$ et $\exists$ » pour écrire mathématiquement « pour tout » et « il existe au moins ». Ceci en détaillé en ligne.

1 EXERCICES

Exercice 1

On se place soit dans le plan, soit dans l'espace. Deux droites distinctes sont dites parallèles quand elles sont situées dans un même plan, et qu'elles n'ont aucun point commun. Elles sont dites sécantes quand elles ont un point commun.

1. On se place dans le plan. Que peut-on dire des deux propriétés $\mathcal{P}$: « D et D' sont parallèles » et $\mathcal{Q}$: « D et D' ne sont pas sécantes » : sont-elles équivalentes, l'une implique-t-elle l'autre ?

2. Reprendre la même question dans l'espace. Indication : trouver un contre-exemple simple.

Exercice 2

Dans chacune des questions suivantes, dire si l'une des propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ implique l'autre ou si elles sont équivalentes ou bien s'il n'y a aucune relation entre elles. On traduira aussi les éventuels résultats avec les expressions *condition suffisante* ou *condition nécessaire*.

1. $\mathcal{P}$: « $x^2 - 3x + 2 = 0$ » et $\mathcal{Q}$: « x est égal à 1 ou à 2 ».

2. $\mathcal{P}$: « $x^2 - 3x + 2 = 0$ » et $\mathcal{Q}$: « $x \in [1,2]$ ».

3. $\mathcal{P}$: « $x > 0$ » et $\mathcal{Q}$: « $x^2 + 2x + 1 > 0$ ».

4. $\mathcal{P}$: « $x > 0$ » et $\mathcal{Q}$: « $x^2 - 2x + 1 > 0$ ».

5. $\mathcal{P}$ « l'entier n est pair » et $\mathcal{Q}$: « l'entier n est divisible par 62 ».

6. $\mathcal{P}$: « l'entier n est divisible par 63 » et $\mathcal{Q}$: « l'entier n est impair ».

7. Soient C et C' deux cercles du plan. Soit $\mathcal{P}$: « l'un des cercles est intérieur à l'autre » et $\mathcal{Q}$: « les cercles n'ont aucun point commun ».

Exercice 3

Démontrer par l'absurde que l'équation $12n^3 - 7n = 1$ n'a aucune solution dans $\mathbb{Z}$.

1 CORRIGÉS

Exercice 1

1. Dans le plan, les deux propriétés sont équivalentes, par définition.

2. Dans l'espace, la situation est différente : deux droites parallèles ne sont pas sécantes, et on a bien $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$. Mais deux droites qui ne se coupent pas ne sont pas toujours parallèles : il suffit de prendre l'axe Ox et la droite passant par le point $(0,0,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{j} = (0,1,0)$. Dans l'espace, les deux propriétés ne sont pas équivalentes.

Exercice 2

1. Les racines de $x^2 - 3x + 2 = 0$ sont $x = 1$ et $x = 2$: les deux propriétés sont équivalentes.

2. Comme les racines 1 et 2 sont dans l'intervalle fermé $[1,2]$, la propriété $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$. Par contre, si l'on prend $x = 3/2$, qui est bien dans $[1,2]$ et où $\mathcal{Q}$ est vraie, on n'a pas $x^2 - 3x + 2 = 0$: la propriété $\mathcal{Q}$ n'implique pas $\mathcal{P}$. On a simplement l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$, et les propriétés ne sont pas équivalentes. *$\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie.*

3. On a $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$. Pour tout $x > 0$, on a bien $(x+1)^2 > 0$: $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$. Mais pour $x = -3$, on a aussi $(x+1)^2 > 0$: $\mathcal{Q}$ n'implique pas $\mathcal{P}$. On a l'implication simple $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$. *La propriété $\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie.*

4. On a $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Pour $x = 1$, où $\mathcal{P}$ est vraie, on a $(x-1)^2 = 0$, qui n'est pas strictement positif : $\mathcal{P}$ n'implique pas $\mathcal{Q}$. Pour $x = -5$, $\mathcal{Q}$ est vraie mais $\mathcal{P}$ est fausse : $\mathcal{Q}$ n'implique pas $\mathcal{P}$. Il n'y a donc aucune relation entre les deux propriétés.

5. Pour $n = 4$, $\mathcal{P}$ est vraie mais $\mathcal{Q}$ est fausse : $\mathcal{P}$ n'implique pas $\mathcal{Q}$. Mais si n est divisible par 62, il est divisible par 2 et donc pair : $\mathcal{Q}$ implique $\mathcal{P}$. On a la seule implication $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$. *La propriété $\mathcal{P}$ est une condition nécessaire pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie.*

6. L'entier $n = 126 = 2 \times 63$ est divisible par 63 mais est pair : la propriété $\mathcal{P}$ est vraie mais $\mathcal{Q}$ est fausse. $\mathcal{P}$ n'implique pas $\mathcal{Q}$. L'entier $n = 15$ est impair mais n'est pas divisible par 63 : $\mathcal{Q}$ est vraie mais $\mathcal{P}$ est fausse, et donc $\mathcal{Q}$ n'implique pas $\mathcal{P}$. Il n'y a aucune relation entre les propriétés.

7. On a clairement $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$. Mais deux cercles ne se coupant pas peuvent être extérieurs l'un à l'autre, et $\mathcal{Q}$ n'implique pas $\mathcal{P}$. On a seulement l'implication $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$. *$\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour que $\mathcal{Q}$ soit vraie.*

Exercice 3

Supposons qu'il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant la relation. L'équation s'écrit $n \times (12n^2 - 1) = 1$, ce qui implique que n divise 1. Les seules possibilités sont alors $n = \pm 1$, mais il est évident que ça ne marche pas. Il y a donc impossibilité, et un tel n n'existe pas.

COURS

2 La négation

[MOTS-CLÉS : négation, contraire, et, ou, non, implication, quel que soit, il existe]

On est amené, en mathématiques comme dans la vie courante, à nier certaines affirmations ou propositions. Il faut savoir le faire de façon claire et simple, ce qui n'est pas toujours évident dans le langage de tous les jours. Regardons cela de près, essentiellement sur des exemples. *Attention, la propriété que l'on souhaite nier peut être vraie ou fausse, cela n'a aucune importance. Il n'y a pas que les choses fausses que l'on souhaite nier.*

1 Exemples mathématiques élémentaires

Point vital à maîtriser

Le contraire (ou négation) d'une propriété $\mathcal{P}$ est la propriété qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie.

– Le contraire (ou négation) de « $x = 3$ » est « $x \neq 3$ ».
– Le contraire de « $x \leq 3$ » est « $x > 3$ ».
– La négation de « x appartient à E » est « x n'appartient pas à E ».

Point vital à maîtriser

Le contraire de « $=$ » est « $\neq$ ». Celui de « $<$ » est « $\geq$ » et celui de « $\leq$ » est « $>$ ».

2 Retour à la vie courante, négation du « ET »

◆ Voici des exemples un peu plus compliqués relevant de la vie courante, et qui vont nous aider en mathématiques.

Exemple 1.a : On est dans le cadre où je possède une voiture, cette proposition n'est pas à remettre en cause. On veut nier la proposition suivante « ma voiture est une allemande de couleur verte ». Il y a deux possibilités pour décrire la situation contraire de ce qui est affirmé :

– « Ma voiture n'est pas allemande ». Dans ce cas, peu importe sa couleur.
– « Ma voiture n'est pas verte ». Dans ce cas, peu importe sa marque.

Exemple 1.b : Ceci peut se résumer en : « soit ma voiture n'est pas une allemande, soit ma voiture n'est pas verte. »

Exemple 1.c : En pratique, la proposition initiale n'est pas très bien écrite. On devrait écrire « elle est allemande ET elle est verte ».

Exemple 1.d : Et la négation de cette proposition sera :

« elle n'est pas allemande » OU BIEN « elle n'est pas verte »

à savoir, même si c'est moins élégant :

NON(allemande ET verte) = Non(allemande) OU BIEN Non(verte)

Exemple 2 : Le contraire de « il pleut à Paris et à Vilnius » est « il ne pleut pas à Paris ou il ne pleut pas à Vilnius », que l'on écrit aussi « soit il ne pleut pas à Paris, soit il ne pleut pas à Vilnius ».

3 La négation de « $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$ » est donc…

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions :

Le contraire de « $\mathcal{P}$ ET $\mathcal{Q}$ » est « Non($\mathcal{P}$) OU Non($\mathcal{Q}$) ».

Exemple 3 : La négation de « n est divisible par 2 et par 3 » est « n n'est pas divisible par 2 ou n'est pas divisible par 3 ».

Exemple 4 : la proposition « $1 < x < 2$ » s'écrit en fait « $x > 1$ et $x < 2$ ». La négation est donc « non($x > 1$) ou non ($x < 2$) » à savoir « $x \leq 1$ ou $x \geq 2$ », ce qui est exactement « $x \in]-\infty,1] \cup [2,+\infty[$ ».

4 Vie courante et mathématiques : la négation du « OU »

- La négation de la négation nous ramène au point de départ. Il est donc logique que la négation du « OU » soit le « ET ».

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions :

La négation de « $\mathcal{P}$ OU $\mathcal{Q}$ » est « Non($\mathcal{P}$) ET Non($\mathcal{Q}$) ».

Exemple 5 : Je dois aller de A à B, et j'ai le choix d'au moins trois moyens de transport, dont le train et l'avion. La négation de « Je prends le train ou

-SUP- en poche

MATHS

L1/L2

2e édition

Les fiches de ce livre récapitulent toutes les mathématiques apprises dans le secondaire et qu'il faut maîtriser pour débuter une licence scientifique ou une CPGE :

- éléments de logique et de raisonnement
- formules et techniques de calcul
- grands théorèmes du lycée en algèbre
- analyse
- géométrie
- probabilités.

Cet ouvrage propose 36 fiches dont 11 sont accessibles par Qrcodes.
Chaque fiche contient :

> **Des rappels de cours :** définitions, formules importantes, théorèmes.

> **Des points de méthodologie** et des conseils.

> **Des exemples** pour illustrer le cours et apprendre à résoudre une question.

> **Des exercices** et leurs corrigés détaillés.

RESSOURCES NUMÉRIQUES OFFERTES

Pour mieux comprendre et testez vos connaissances grâce aux QR codes :

- **des exemples et exercices supplémentaires**
- **QCM**
- **Vrai/Faux**

François Cottet-Emard

a enseigné à l'Université de Paris-Saclay dans l'année charnière faisant la transition entre la Terminale et l'année L1 de Licence, ainsi qu'en L2 mathématique – physique – informatique. Il a écrit de nombreux ouvrages de mathématiques chez De Boeck Supérieur.

ISBN : 978-2-8073-4079-4

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com

Conception graphique : Primo&Primo®